DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures - Coefficient : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLEME

On désigne par E un espace hermitien de dimension finie $m \geqslant 2$, muni d'un produit scalaire $(x,y) \mapsto (x|y)$ (linéaire en y, semi-linéaire en x). On note $x \mapsto ||x||$ la norme associée.

On désigne par $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des endomorphismes de E et on munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme $u \mapsto ||u|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} ||u(x)||$. On note I l'identité de E.

On note Spu le spectre d'un endomorphisme u, ensemble des valeurs propres de u.

On rappelle que tout endomorphisme u de E admet un adjoint u*, tel que, pour tout couple (x,y) d'éléments de E, $(u^*x|y)=(x|uy)$.

On note H l'ensemble des endomorphismes hermitiens de E, c'est-à-dire tels que $u^*=u$.

On désigne par H_+ (rep. H_+^*) la partie de H constituée des endomorphismes hermitiens positifs (resp. strictement positifs), c'est-à-dire tels que pour tout élément x de E, $(x|ux) \geqslant 0$ (resp. $(x|ux)>0$ si $x \neq 0$).

On désigne par GL(E) le groupe linéaire de E, constitué des automorphismes de E, et par SL(E) le sous-groupe de GL(E) constitué des éléments u tel que Det u=1 ; on désigne enfin par U(E) le groupe unitaire de E, constitué des automorphismes unitaires, c'est-à-dire tels que $u^*u=uu^*=I$ et par SU(E) le sous-groupe $U(E) \cap SL(E)$.

On étudie d'abord la décomposition spectrale d'un endomorphisme hermitien, ce qui fait l'objet de la partie I, puis l'exponentielle d'un endomorphieme, ce qui fait l'objet de la partie II.

I - DECOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME HERMITIEN.

Dans toute la suite, pour tout endomorphisme u de E, on note $\rho(u)$ le rayon spectral de u, défini par $\rho(u) = \sup_{\lambda \in Spu} |\lambda|$.

Lorsque u est hermitien, les valeurs propres sont réelles et on pose $M(u) = \sup_{\lambda \in Spu} \lambda$ et $m(u) = \inf_{\lambda \in Spu} \lambda$. En outre, E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$.

1. NORME ET RAYON SPECTRAL D'UN ENDOMORPHISME HERMITIEN.

Soit a un endomorphisme hermitien de E.

a) Prouver que, pour tout vecteur x de E, $||ax||^2 \leqslant \rho(a)^2 ||x||^2$, et $(x|ax) \leqslant M(a)||x||^2$

Pour cela on décomposera x dans une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_m)$ de vecteurs propres de a, où pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant m$, $a(e_j)=\lambda_j e_j$.

b) Etablir que

$$(1) \qquad \rho(a)=||a|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} |(x|ax)|.$$

Etablir de même que

$$(2) \qquad M(a) = \sup_{||x|| \leqslant 1} (x|ax).$$

En observant que m(a) = -M(-a), donner une expression analogue pour m(a).

c) Prouver que, pour tout élément h de H et pour tout vecteur x de E tel que $||x|| \leqslant 1$, $(x|ax)-||h|| \leqslant (x|(a+h)x) \leqslant (x|ax)+||h||$.

En déduire que

$|M(a+h)-M(a)| \leqslant ||h||$ et $|m(a+h)-m(a)| \leqslant ||h||$.

En particulier, les applications $a \mapsto M(a)$ et $a \mapsto m(a)$ sont continues sur H.

d) Caractériser les éléments a hermitiens positifs et les éléments a hermitiens strictement positifs à l'aide de m(a).

En déduire que H_+ est fermé dans H et que H_+^* est ouvert dans H.

Déterminer l'adhérence de H_+^*.

A SUIVRE

2. DECOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME HERMITIEN.

Soit a un endomorphisme hermitien de E. Pour tout élément λ de Spa, on note p_λ le projecteur orthogonal sur $E_\lambda(a)$.

a) Montrer que les projecteurs p_λ satisfont aux relations suivantes :

(3) $\quad p_\lambda^2=p_\lambda$, $p_\lambda p_\mu=0$ si $\lambda\neq\mu$, $\sum_{\lambda\in Spa} p_\lambda=I$, $p_\lambda^*=p_\lambda$

(4) $\quad a=\sum_{\lambda\in Spa} \lambda p_\lambda$.

(Décomposition spectrale de a).

b) Inversement, soit $(\lambda_1,\lambda_2,\ \ldots,\lambda_r)$ une suite de nombres complexes et $(p_1,p_2,\ldots,p_r)$ un système de projecteurs de E tels que, pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![1,r]\!]$, $p_j^2=p_j$, $p_ip_j=0$ si $i\neq j$, $\sum_{j=1}^{r} p_j=I$, $p_j^*=p_j$ et $a=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j p_j$.

Montrer que E est somme directe orthogonale des sous-espaces $E_j=\mathrm{Im}p_j$, et que pour tout élément x_j de E_j, $a(x_j)=\lambda_j x_j$. En déduire que Spa est constitué des nombres $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ et que, si ces nombres sont <u>distincts deux à deux</u>, alors, pour tout j, $E_j=E_{\lambda_j}(a)$ et p_j est le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_j}(a)$. La décomposition spectrale (4) est donc <u>unique</u>. Lorsque les λ_j ne sont pas supposés distincts deux à deux, prouver que pour tout élément λ de Spa, $E_\lambda(a)$ est somme directe orthogonale des sous-espaces E_j, où $\lambda_j=\lambda$.

c) Etablir que, pour tout polynôme Q appartient à $\mathbb{C}[X]$.

(5) $\quad Q(a)=\sum_{\lambda\in Spa} Q(\lambda)p_\lambda$.

En déduire le spectre de Q(a) et prouver que si Q est <u>injectif</u> sur Spa, (5) est la décomposition spectrale de Q(a).

d) Etablir que, pour tout élément λ de Spa, il existe un polynôme L_λ tel que $p_\lambda=L_\lambda(a)$.

3. INVERSE D'UN ENDOMORPHISME HERMITIEN STRICTEMENT POSITIF.

a) Soit a un endomorphisme hermitien positif. Prouver que a est inversible si et seulement si a est strictement positif. Ecrire alors la décomposition spectrale de a^{-1}; en déduire que $\|a^{-1}\|=\frac{1}{m(a)}$.

b) Soit α un nombre réel strictement positif. Etablir que pour tout coupe (a,b) d'éléments de H_+^* tels que $m(a)\geq\alpha$ et $m(b)\geq\alpha$, alors $\|b^{-1}-a^{-1}\|<\frac{1}{\alpha^2}\|b-a\|$.

c) En déduire que l'application $u\mapsto u^{-1}$ est une bijection continue de H_+^*.

4. RACINE p^{IEME} D'UN ENDOMORPHISME HERMITIEN POSITIF.

Soit p un entier strictement positif et a un endomorphisme positif, dont la décomposition spectrale est écrite sous la forme (4). On appelle racine $p^{ième}$ de a l'endomorphisme hermitien positif défini par la relation

$$a^{1/p}=\sum_{\lambda\in Spa}\lambda^{1/p}p_\lambda.$$

a) Prouver que l'application $u\mapsto u^p$ est une bijection de H_+, dont l'application réciproque est $v\mapsto v^{1/p}$. Etablir que pour tout élément a de H_+, $\|a^p\|=\|a\|^p$.

b) Soit β un nombre réel strictement positif. Etablir que, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout couple (a,b) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que $\|a\|\leq\beta$ et $\|b\|\leq\beta$, alors

$$\|b^n-a^n\|\leq n\beta^{n-1}\|b-a\| \ ;$$

on raisonnera par récurrence sur n, en écrivant que

$$b^{n+1}-a^{n+1}=b^n(b-a)+(b^n-a^n)a.$$

En déduire que l'application $u\mapsto u^p$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

c) Soit (b_k) une suite d'éléments de H_+ convergeant vers un élément b de H_+. On pose $a_k=b_k^{1/p}$ et $a=b^{1/p}$. Prouver que la suite (a_k) est bornée ; en déduire que (a_k) converge vers a (on prouvera que, dans le cas contraire, il existerait une suite extraite de (a_k) convergeant vers un élément a' de H_+ distinct de a). Prouver finalement que l'application $u\mapsto u^{1/p}$ est continue sur H_+.

5. NORME DE L'ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME.

Soit u un endomorphisme de E.

a) Prouver que, pour tout vecteur x de E, $\|ux\|=\sup_{\|y\|\leq 1}|(y|ux)|$.

En déduire que $\|u^*\|=\|u\|$, puis que l'application $u\mapsto u^*$ est continue.

b) Montrer que u^*u est hermitien positif et que $\|u^*u\|=\|u\|^2$.

Tournez la page S.V.P.

6. DECOMPOSITION POLAIRE D'UN AUTOMORPHISME.

On se propose de prouver que tout automorphisme u de E s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme u=kp où k∈U(E) et p∈ H_+^*.

a) Prouver que si (k,p) est un tel couple, nécessairement $u^*u=p^2$ et $k=up^{-1}$. En déduire l'unicité de (k,p).

b) Inversement, on pose $p=(u^*u)^{1/2}$ et $k=up^{-1}$. Prouver que (k,p) convient.

c) Prouver finalement que l'application $(k,p)\mapsto kp$ est un homéomorphisme de $U(E)\times H_+^*$ sur GL(E).

II - EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME.

1. SUBSTITUTION D'UN ENDOMORPHISME DANS UNE SERIE ENTIERE.

Soit $S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ une série entière à coefficients complexes ayant un rayon de convergence R>0. Pour tout β appartenant à $]0,R[$, on pose $\sigma(\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|\beta^n$ et on note $D\sigma$ la dérivée de la fonction σ.

a) Prouver que, pour tout élément u de E tel que $\|u\|<R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n u^n$ est absolument convergente ; on pose alors $S(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n u^n$. Montrer que $\|S(u)\|\leq\sigma(\|u\|)$.

b) Soit β un élément de $]0,R[$. Prouver que pour tout couple (a,b) d'endomorphismes de E tels que $\|a\|\leq\beta$ et $\|b\|\leq\beta$,

$$\|S(b)-S(a)\|\leq D\sigma(\beta)\|b-a\|.$$

En déduire que l'application $u\mapsto S(u)$ est continue sur la boule ouverte $B_0(R)$.

c) Prouver en particulier que, pour tout endomorphisme u tel que $\|u\|<1$, (I+u) est inversible et que $(I+u)^{-1}=I-u+u^2+\ldots+(-1)^n u^n+\ldots$

Dans toute la suite on note exp l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $\exp u=I+\frac{u}{I}+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots$ et on note e_u l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $e_u(t)=\exp tu$.

2. EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME HERMITIEN.

a) Soit a un endomorphisme hermitien de E, et $a=\sum_{\lambda\in Spa}\lambda p_\lambda$ sa décomposition spectrale. Prouver que $\exp a=\sum_{\lambda\in Spa}\exp\lambda\ p_\lambda$ est la décomposition spectrale de exp a ; en déduire que exp a est hermitien strictement positif, que $\|\exp a\|=e^{M(a)}$ et $\|\exp(-a)\|=e^{-m(a)}$. Prouver aussi que, pour tout couple (s,t) de nombres réels, $e_a(s+t)=e_a(s)e_a(t)$.

b) Prouver que l'application $u\mapsto\exp u$ est une bijection de H sur H_+^*, continue ainsi que sa réciproque.

3. DERIVATION DES FONCTIONS DEFINIES PAR UNE SERIE ENTIERE.

On conserve les notations de II.1.

Soit A une sous-algèbre commutative unitaire de $\mathcal{L}(E)$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe C^1 sur J à valeurs dans A. Alors sa dérivée Df est encore à valeurs dans A.

a) Prouver, par récurrence sur n, que pour tout n>0, et pour tout élément t de J,

$$(6)\qquad Df^n(t)=nf^{n-1}(t)Df(t).$$

b) On suppose en outre que, pour tout élément t de J, $\|f(t)\|<R$. On note alors g l'application de J dans A définie par

$$g(t)=Sof(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\left[f(t)\right]^n.$$

Prouver que g est de classe C^1 sur J et que, pour tout élément t de J,

$$(7)\qquad Dg(t)=DS(f(t))\ Df(t).$$

(On montrera qu'on peut dériver terme à terme la série précédente).

En particulier

$$(8)\qquad D(\exp f)=(\exp f)Df.$$

À SUIVRE

4. EQUATION DIFFERENTIELLE SATISFAITE PAR e_u

Soit u un endomorphisme de E.

a) Prouver que e_u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $De_u=e_u.u=u.e_u$.

b) Montrer que pour tout nombre réel t, $e_u(t).e_{-u}(t)=I$ (on pourra dériver le premier membre).

En déduire que exp u est inversible et que $(\exp u)^{-1}=\exp -u$.

c) Montrer que e_u est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y'=uy$, $y(0)=I$.

Pour montrer l'unicité, on pourra dériver $t\mapsto e_{-u}(t)y(t)$.

5. EQUATION FONCTIONNELLE DE L'EXPONENTIELLE.

a) Soient a et b des endomorphismes de E tels que ab=ba. Prouver que, pour tout nombre réel t, $e_{a+b}(t)=e_a(t)e_b(t)$ (montrer que les deux membres sont solutions d'un même problème de Cauchy). En particulier.

(9) Si ab=ba, exp(a+b)=exp a.exp b.

et pour tout couple (s,t) de nombres réels,

(10) $e_a(s+t)=e_a(s)e_a(t)$.

b) Montrer que si d est un endomorphisme diagonalisable, exp d l'est aussi, et que $\det(\exp d)=\exp(\mathrm{Tr}\, d)$.

c) Montrer que si n est un endomorphisme nilpotent, exp n - I est nilpotent, et que $\det(\exp n)=1$ et $\mathrm{Tr}\, n=0$.

d) En déduire que pour tout endomorphisme u de E, $\det(\exp u)=\exp(\mathrm{Tr}\, u)$.

6. EXPONENTIELLE ET GROUPE SL(E).

a) Soit z un nombre complexe tel que pour tout nombre réel t, $e^{tz}=1$. Prouver que z=0 (Dériver $t\mapsto e^{tz}$).

b) Soit u un endomorphisme de E. Prouver que Tru=0 si et seulement si, pour tout nombre réel t, exptu $\in$ SL(E).

7. EXPONENTIELLE ET GROUPE UNITAIRE U(E).

a) Soit a un endomorphisme de E.

Prouver que a est hermitien si et seulement si, pour tout nombre réel t, exp ia est unitaire.

b) Déterminer tous les endomorphismes hermitiens a tels que exp ia=I (utiliser la décomposition spectrale de a).

c) Soit u un élément de U(E). Prouver que les valeurs propres de u sont de module 1 et que E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u. En déduire qu'il existe un élément a de H tel que exp ia=u. Un tel élément a est-il unique ?

d) Tout élément u de SU(E) est-il de la forme u=exp ia, où a$\in$H et Tra=0 ?

8. BIJECTIVITE DE L'EXPONENTIELLE AU VOISINAGE DE 0.

Pour tout endomorphisme u de E et pour tout endomorphisme v de E tel que $\|v\|<1$, on pose

$$f(u)=\exp u-I$$

$$g(v)=v-\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{v^n}{n}+\ldots$$

a) Déterminer la dérivée de $t\mapsto g(tv)$, où $t\in[0,1]$.

b) Prouver que fog(v)=v. Pour cela, on introduira la fonction auxiliaire φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t)=\exp[-g(tv)]\cdot(1+tv)$.

c) Prouver que si $\|u\|<\ln 2$, $\|f(u)\|<1$ et que gof(u)=u. (Introduire une fonction auxiliaire ψ).

d) En déduire que l'image par exp de la boule ouverte $B_0(\ln 2)$ est un ouvert V de $\mathcal{L}(E)$ contenant I et contenu dans la boule ouverte $B_1(1)$ et que exp définit un homéomorphisme de $B_0(\ln 2)$ sur V.

FIN